Жылуэнергетикасындағы сандық әдістер

Лекция 3

Тейлор қатарына жіктеу әдісімен шекті-айырымды қатынастарды алу. Теңдеудің шаблонын тұрғызу

Лектор: Оспанова Ш.С., PhD, аға оқытушы

БІРІНШІ РЕТТІ ТУЫНДЫ ҮШІН ШЕКТІ-АЙЫРЫМДЫ ҚАТЫНАСТАР

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

АЛҒА

i+1 қадам үшін, яғни алға 1 қадам жасағанда

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

АРТҚА

i-1 қадам үшін, яғни артқа қадам 1 жасағанда

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

ОРТАЛЫҚ

екі жаққа бірдей бір қадам жасағанда, яғни 2 Δx *үшін*

ЕКІНШІ РЕТТІ ТУЫНДЫ ҮШІН ШЕКТІ АЙЫРЫМДЫ ҚАТЫНАСТЫ ШЫҒАРУ

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ... \quad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ... \quad (2)$$

Осы екі өрнекті бір-біріне мүшелеп қосайық:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 f_i + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{12}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЖРМ \quad (3)$$

Осыдан туындыны тапсақ:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \underbrace{\frac{1}{12}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЖРМ}_{\text{ЖРМ}}$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}$$

Бұл өрнек ***екінші*** *ретті дәлдікке* ие, екінші ретті туынды үшін **шекті-айырымды қатынас** деп аталады.

Получите конечно-разностное соотношение для смешанной производной:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(1)}$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(2)}$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(3)}$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + $$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(4)}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (2)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (3)$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (6)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(5)}$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(6)}$$

(5)+(6):

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j-1} = 4\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}}$$

ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕКТІ-АЙЫРЫМДЫ ҚАТЫНАСТАРМЕН ӨРНЕКТЕУ

Енді бірінші туындылардың аппроксимациясы үшін орталық айырымды қатынастарды таңдап ала отырып, (1) теңдеуді шекті айырымдармен өрнектеп жазайық

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (1)$$

t уақыт бойынша - орталық

x координата бойынша - орталық

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad \Rightarrow \quad u\frac{\partial f}{\partial x} = u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} \quad \Rightarrow \quad a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}$$

ҮЗІЛІССІЗДІК ТЕҢДЕУІН ШЕКТІ-АЙЫРЫМДЫ ҚАТЫНАСТАРМЕН ӨРНЕКТЕУ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon}{\partial y} = 0$$

t – уақыт бойынша алға

x, y - артқа

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_n = \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_i = \rho \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}$$

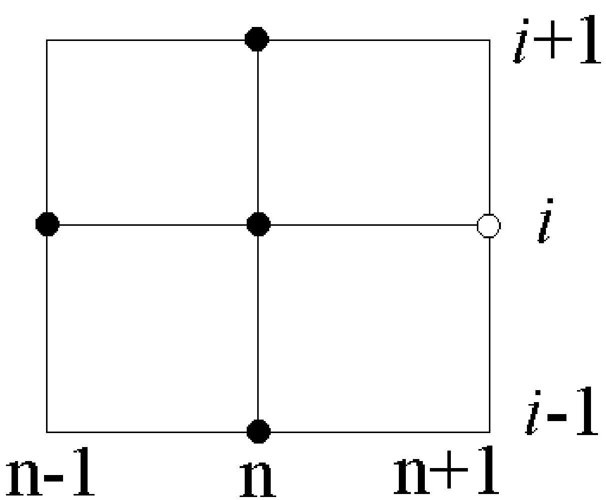
$$\left.\frac{\partial \rho \upsilon}{\partial y}\right|_i = \rho \frac{\upsilon_{i,j}^{n} - \upsilon_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}$$

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \rho \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + \rho \frac{\upsilon_{i,j}^{n} - \upsilon_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}}{\Delta x^2}$$

Мұндағы ізделініп отырған функцияның мәні - уақыт бойынша оң жақ қабаттағы f функциясының f_i^{n+1} мәні, яғни, оны жоғарыдағы өрнектен тапсақ:

$$f_i^{n+1} = f_i^{n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}\right)$$



$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Үш қабатты бес нүктелік шаблон

Теңдеудің шаблонын құрастыру

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$